Le Chef du Service des instruments de mesure
à
Messieurs les ingénieurs généraux, ingénieurs en chef,
directeurs de circonscription métrologique, ingénieurs,
ingénieurs divisionnaires et ingénieurs des travaux métrologiques
et techniciens de la métrologie

Déformation élastique des réservoirs cylindriques verticaux

CIRCULAIRE N° 71.103.0.327.0. 13 décembre 1971

Une circulaire déjà ancienne traitait du calcul de la déformation élastique des réservoirs cylindriques verticaux.

J'ai jugé utile d'apporter quelques modifications à ce texte (meilleure cohérence des unités, cas particulier de la première virole, présence d'une poutre raidisseuse).

Il est bien certain cependant que les calculs, effectués en appliquant les formules du présent texte, aboutissent à des résultats très voisins de ceux obtenus à partir de l'ancienne circulaire.

Le Chef du Service
des instruments de mesure,
C. Goldner.

Annexe a la circulaire n° 71.103.0.327.0 du 13 décembre 1971

DÉFORMATION ÉLASTIQUE DES RÉSERVOIRS CYLINDRIQUES VERTICAUX SOUS L'EFFET DE LA PRESSION DUE A LA HAUTEUR DE LIQUIDE

Bases : article de M. Ibert, paru dans le numéro de septembre 1945 de la *Revue de Métrologie.*

Introduction

Considérons un bac cylindrique vertical rempli jusqu'à une hauteur H avec un liquide de masse volumique ρ. Soit R le rayon du bac au niveau H.

Si le bac ne se déforme pas, le volume centimétrique au niveau H, c'est-à-dire le volume qu'il faut rajouter pour que le niveau augmente de 1 cm, est : $v = \pi R^2 \times 1$

Si le bac se déforme, l'augmentation du niveau de 1 cm entraîne une augmentation de la pression exercée par le liquide sur la robe du bac depuis le fond de celui-ci jusqu'à la hauteur H + 1. Il en résulte une augmentation du volume de cette portion du bac. Donc pour augmenter le niveau de 1 cm, il faut rajouter un volume :

$v + dv = \pi R^2 \times 1 + dv$, dv pouvant être théoriquement calculé.

C'est toute la partie du bac jusqu'à la hauteur H + 1 qui se déforme, mais, du point de vue du barêmage, tout se passe comme si seule la zone de 1 cm comprise entre H et H + 1 se déformait, son volume centimétique passant de v à $v + dv$.

Il est difficile, dans l'établissement d'un barême, de tenir compte d'un volume centimétrique variant à chaque centimètre.

La première approximation est donc la suivante :

Le bac étant rempli jusqu'à la virole de rang $n - 1$ (numérotation des viroles à partir de celle du bas), on calcule le volume $V_n + dV_n$ nécessaire pour remplir la virole de rang n (V_n est connu par le ceinturage, on ne calculera ici que dV_n) en tenant compte de la déformation du bac (déformation des viroles 1 à n). Tout se passant comme si seule la virole de rang n se déformait, on considèrera que l'augmentation de volume dV_n se répartit également sur toute la hauteur h_n de cette virole, donc que l'augmentation du volume centimétrique de la virole de rang n est

$$dv_n = \frac{dV_n}{h_n}$$

Exposé du calcul

Lorsque la virole de rang n est pleine, l'augmentation de la pression due au liquide, sur les parois d'une virole de rang i située en dessous ($i < n$) est

$$dP = \rho g h_n \ (g = \text{accélération de la pesanteur})$$

L'augmentation du rayon de la virole i sous l'effet du remplissage de la virole n est (voir article de M. Ibert) :

$$dR_{in} = dP \times R_i \times \frac{R_i}{e_i E} = \rho\ g\ h_n\ R_i \frac{R_i}{e_i E}$$

e_i étant l'épaisseur de la tôle de la virole i, E étant le module d'élasticité du métal.

L'augmentation du volume de la virole i est donc : $dV_{in} = 2\pi R_i \times dR_{in} \times h_i$

On admet que $R_i = \frac{D}{2}$ quel que soit i, D étant le diamètre moyen du bac.

Donc : $dV_{in} = \frac{\pi \rho g}{4E} D^3 h_n \frac{h_i}{e_i}$

On admet de plus :

1) que l'effet du remplissage de la virole n sur elle-même est la moitié de ce qu'il est sur une autre virole. Donc

$$dV_{nn} = \frac{\pi \rho g}{4E} D^3 h_n \frac{h_n}{2e_n}$$

2) que l'effet du remplissage de la virole n sur la virole 1 (en raison de la présence du fond du bac) doit être corrigé par le coefficient 0,8. Donc

$$dV_{1n} = \frac{\pi \rho g}{4E} D^3 h_n \left(0{,}8 \frac{h_1}{e_1}\right)$$

$$dV_{11} = \frac{\pi \rho h}{4E} D^3 h_1 \left(0{,}8 \frac{h_1}{2e_1}\right)$$

L'augmentation totale du volume du bac sous l'effet du remplissage de la virole n est

$$dV_n = \frac{\pi \rho g}{4E} D^3 h_n \left[0{,}8 \frac{h_1}{e_1} + \frac{h_2}{e_2} + \dots + \frac{h_i}{e_i} + \dots + \frac{h_n}{2e_n}\right]$$

Tout se passe comme si le volume centimétrique dans la virole n augmentait de

$$dv_n = \frac{dV_n}{h_n} = \frac{\pi \rho g}{4E} D^3 \left[0{,}8 \frac{h_1}{e_1} + \frac{h_2}{e} + \dots + \frac{h_i}{e_i} + \dots + \frac{h_n}{2e_n}\right]$$

Remarque : le gonflement du bac plein est :

$$dV = \sum_{n=1}^{N} dV_n, \text{ N étant le nombre total de viroles.}$$

On peut calculer approximativement dV en considérant le bac comme ayant une seule virole de hauteur $H_t = \sum_{n=1}^{N} h_n$ et d'épaisseur $e = \frac{\Sigma e_i}{N}$ (moyenne des épaisseurs) $dV = \frac{\pi \rho g}{4E} D^3 H_t \frac{H_t}{2e}$

On ne tiendra compte du gonflement que si

$$\frac{dV}{V} = \frac{4dV}{\pi D^{\cdot} H_t} = \frac{\rho g}{E} \frac{DH_t}{2e} \geq \frac{5}{10\ 000}$$

Valeurs numériques

On prendra $\rho = 0{,}8$ g/cm³ (masse volumique moyenne) ; $g = 10$ m/s² ; $E = 22.10^5$ bar

Donc $\frac{\pi \rho g}{4E} = 2{,}86 \ . \ 10^{-10}$ cm⁻¹

$$\frac{\rho g}{E} = 3{,}64 \ . \ 10^{-10} \text{ cm}^{-1} \quad \left(\text{ou } \frac{\rho g}{2E} = 1{,}82 \ . \ 10^{-10} \text{ cm}^{-1}\right)$$

On tient compte du gonflement si

$$\frac{dV}{V} = 3{,}64 \ . \ 10^{-10} \ . \ \frac{DH_t}{2e} \geq 5 \ . \ 10^{-4} \text{ avec D, } H_t, e \text{ en cm.}$$

alors

$$dv_n = 2{,}86 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{D}^3 \left[0{,}8\,\frac{h_1}{e_1} + \frac{h_2}{e_2} + \ldots + \frac{h_i}{e_i} + \ldots + \frac{h_n}{2e_n}\right]$$

(dv_n en centimètres cubes par centimètre pour D, h_i, e_i en centimètres)

Exemple numérique

Bac de 8 viroles. $h_i = 180$ cm $\mathrm{H}_t = 1440$ cm

$e = 0{,}9 \,.\, 0{,}85 \,.\, 0{,}75 \,.\, 0{,}70 \,.\, 0{,}65 \,.\, 0{,}65 \,.\, 0{,}65 \,.\, 0{,}65$

$e_{\text{moyen}} = 0{,}725$ cm

$\mathrm{D} = 1600$ cm

$$\frac{d\mathrm{V}}{\mathrm{V}} = 3{,}64 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{1\,600 \times 1\,440}{2 \times 0{,}725} = 5{,}8 \cdot 10^{-4}$$

On remplit le tableau

virole influencée	e	$\frac{h}{e}$	virole influençante 1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,90	200	80	160	160	160	160	160	160	160
2	0,85	211		105	211	211	211	211	211	211
3	0,75	240			120	240	240	240	240	240
4	0,70	257				128	257	257	257	257
5	0,65	277					138	277	277	277
6	0,65	277						138	277	277
7	0,65	277							138	277
8	0,65	277								138
			80	265	491	739	1006	1283	1560	1837

dans lequel la case de la ligne i et de la colonne n contient $\frac{h_i}{e_i}$,

la case de la ligne i et de la colonne i contient $\frac{h_i}{2e_i}$,

la case de la ligne 1 et de la colonne n contient $0{,}8\,\frac{h_1}{e_1}$,

la case de la ligne 1 et de la colonne 1 contient $0{,}8\,\frac{h_1}{2e_1}$.

En sommant les colonnes, on obtient dans la colonne n

$$0{,}8\,\frac{h_1}{e_1} + \frac{h_2}{e_2} + \ldots + \frac{h_i}{e_i} + \ldots + \frac{1}{2}\,\frac{h_n}{e_n}$$

Donc en multipliant la somme de la colonne n par $2{,}86 \cdot 10^{-10}\ D^3 = 1{,}17$ on obtient dv_n en centimètres cubes par centimètre.

virole	augmentation du volume centimétrique		gonflement de la virole en dm³
	en cm³/cm	en dm³/cm	
1	93	0,093	17
2	310	0,31	56
3	574	0,574	103
4	864	0,864	155
5	1177	1,177	212
6	1501	1,501	270
7	1825	1,825	329
8	2149	2,149	387
			1529

Le gonflement total est donc, en valeur relative, de $5{,}3 \cdot 10^{-4}$.

Le gonflement apparent de la dernière virole atteint 10^{-3}.

Remarques

I) Limite d'utilisation.

Le barême corrigé est établi pour $\rho = 0{,}8$ g/cm³.

On le considèrera valable pour des variations $d\rho$ telles que la variation correspondante sur $\frac{dV}{V}$ ne dépassera pas 10^{-4}, donc pour $d\rho$ tel que :

$$\frac{g}{E}\,\frac{DH}{2e}\,d\rho < 10^{-4}, \qquad \text{où} \qquad \frac{g}{E} = 4{,}55 \cdot 10^{-10}\ \text{cm}^2/\text{g},$$

donc $d\rho < 22 \cdot 10^4\ \frac{2e}{DH}$, avec $d\rho$ en grammes par centimètre cube pour e, D, H en centimètres.

Dans l'exemple numérique choisi : $d\rho < 0{,}14$ g/cm³.
ρ peut donc varier en gros entre 0,65 et 0,95 g/cm³

II) Présence de poutres raidisseuses encerclant le bac.

Ces poutres, au nombre de 2 ou 3, sont en général placées au milieu de viroles.

On affectera le paramètre $\frac{h_i}{e_i}$ relatif à ces viroles du coefficient 0,8 comme pour la 1re virole.